Savoir-Faire : Déterminer une équation cartésienne avec un vecteur directeur

Propriété:

• Toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.
Cette équation est appelée ***équation cartésienne*** de la droite.

• Réciproquement, toute équation du type $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ définit une unique droite de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

Méthode : **Déterminer une équation de la droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$**

Méthode 1 : M ∈ d ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ det $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$

Méthode 2 : d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a et b sont tels que $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ puis on cherche c avec le point A.

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) où A(-1 ; 3) et B(3 ; -2).

Méthode 1 : (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\text{M}(x; y) \in (\text{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AB}}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ y-3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -5(x+1) - 4(y-3) = 0$

$\Leftrightarrow -5x - 4y + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 5x + 4y - 7 = 0$

(AB) a pour équation cartésienne $5x + 4y - 7 = 0$

Méthode 2 : (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Donc (AB) admet une équation cartésienne de la forme :

$-5x - 4y + c = 0$

Or A(-1 ; 3) ∈ (AB) donc :

$-5 \times x_A - 4 \times y_A + c = 0$

$-5 \times -1 - 4 \times 3 + c = 0$

$-7 + c = 0$

$c = 7$

Donc (AB) a pour équation cartésienne $-5x - 4y + 7 = 0$.

Exercice :

Déterminer une équation cartésienne des 3 droites suivantes :

D_1 est la droite passant par A(-3 ; 2) et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D_2 est la droite passant par B(-3 ; 0) et C(-1 ; 10).

D_3 est la droite passant par E(2 ; -3) et parallèle à la droite d d'équation $2x - y + 2 = 0$.

Correction :

Pour la droite D_1

Méthode 1 : D_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(x;y) \in D_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ y-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -(x+3)-2(y-2)=0$

$\Leftrightarrow -x-2y+1=0$

$\Leftrightarrow x+2y-1=0$

D_1 a pour équation cartésienne $x+2y-1=0$

Méthode 2 : D_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Donc D_1 admet une équation cartésienne de la forme :

$-x - 2y + c = 0$

Or A(-3 ; 2) ∈ D_1 donc :

$-x_A - 2 \times y_A + c = 0$

$-(-3) - 2 \times 2 + c = 0$

$-1 + c = 0$

$c = 1$

Donc D_1 a pour équation cartésienne :

$-x - 2y + 1 = 0$ soit $x + 2y - 1 = 0$.

Pour la droite D_2

Méthode 1 : D_2 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(x;y) \in (\mathrm{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{BM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ y & 10 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 10(x+3)-2y=0$

$\Leftrightarrow 10x-2y+30=0$

$\Leftrightarrow 5x-y+15=0$

D_2 a pour équation cartésienne $5x-y+15=0$

Méthode 2 : D_2 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$.

Donc D_2 admet une équation cartésienne de la forme :

$10x - 2y + c = 0$

Or B(-3 ; 0) ∈ D_2 donc :

$10 \times x_B - 2 \times y_B + c = 0$

$10 \times (-3) - 2 \times 0 + c = 0$

$-30 + c = 0$

$c = 30$

Donc D_2 a pour équation cartésienne :

$10x - 2y + 30 = 0$ soit $5x - y + 15 = 0$.

Pour la droite D_3

La droite d d'équation $2x - y + 2 = 0$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

La droite D_3 est parallèle à la droite d donc elle admet aussi le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

Méthode 1 : D_3 est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\mathrm{M}(x;y) \in D_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{EM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\mathrm{EM}}, \vec{u}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y+3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-2)-(y+3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-y-7=0$

D_3 a pour équation cartésienne $2x-y-7=0$

Méthode 2 : D_3 est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Donc D_3 admet une équation cartésienne de la forme :

$2x - y + c = 0$

Or E(2 ; -3) ∈ D_3 donc :

$2 \times x_E - y_E + c = 0$

$2 \times 2 - (-3) + c = 0$

$7 + c = 0$

$c = -7$

Donc D_3 a pour équation cartésienne : $2x - y - 7 = 0$.